

INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

PROBABILIDAD

DOCENTES: MANUEL PÉREZ
ESTHER BLANCO

CONCEPTOS BÁSICOS

- **PROBABILIDAD:** Cociente de dividir el número de éxitos entre el total de casos posibles-

$$P = \frac{\text{No. de éxitos}}{\text{Total de casos posibles}}$$

- **EXPERIMENTO ALEATORIO:** Aquel que se puede repetir muchas veces bajo las mismas condiciones, como lanzar un dado varias veces, sacar una balota de una tómbola.
- **PUNTO MUESTRAL O SUCESO:** El resultado de una prueba.
- **ESPACIO MUESTRAL:** Conjunto de todos los resultados posibles en un experimento aleatorio. Ej: Al lanzar un dado existen 6 puntos muestrales y el conjunto de estos es un espacio muestral. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

La probabilidad de obtener 6 es: $P_6 = \frac{1}{6} = 0.16$

La probabilidad de obtener 2 o 5: $P^2 + P^5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$

La probabilidad de obtener 2 en el primer dado y 5 en el segundo dado.

$$P_2 \times P_5 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0.027$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) \\ (2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) \\ (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6) \\ (5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6) \\ (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \end{array} \right\}$$

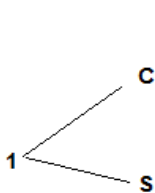
La probabilidad de obtener en uno de ellos 2 y en el otro 5 es:

$$P_{(2,5)} = P_2 \times P_5 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

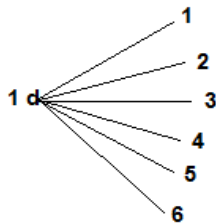
$$P_{(5,2)} = P_5 \times P_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\rightarrow P_{(2,5)} + P_{(5,2)} = \frac{1}{18} = 0,005$$

- **DIAGRAMAS DE ARBOL:** Forma sencilla de listar o mostrar la secuencia de las operaciones que se pueden realizar. Ejemplos:
 - Lanzamiento de una moneda
 - Lanzamiento de un dado

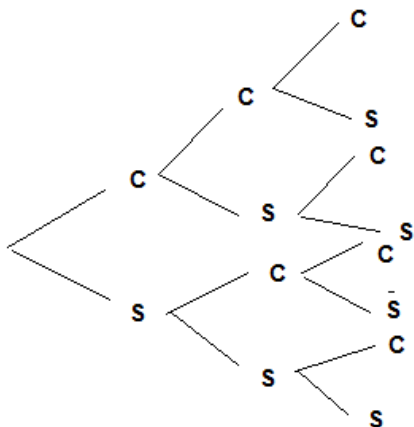


$$S = \{C, S\}$$



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

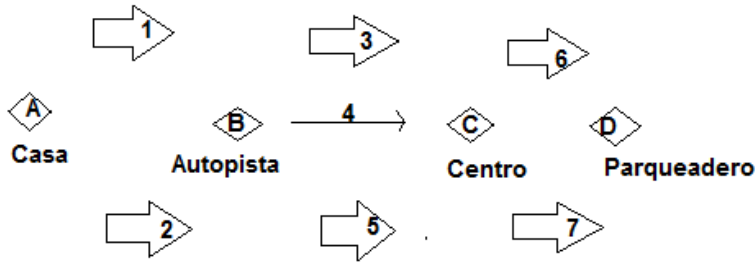
- C) Lanzamiento de una moneda , 3 veces:



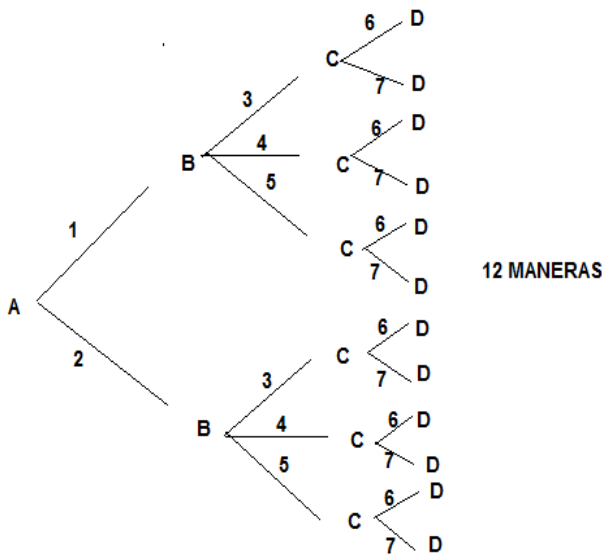
$$S = \left\{ \begin{array}{l} CCC \\ CCS \\ CSC \\ CSS \\ SCC \\ SCS \\ SSC \\ SSS \end{array} \right\}$$

- D) Juan vive en el extremo norte de la ciudad y sólo cuenta con dos rutas para llegar a la autopista. Una vez alcanzada la autopista tiene tres rutas para llegar al centro de la ciudad. Ya en el centro puede seleccionar dos rutas para llegar al parqueadero más cercano a su oficina.

De cuántas maneras o rutas podría Juan conducir el auto de su casa al parqueadero más próximo al parqueadero más próximo a su oficina?



$$S = \{(1,3,6), (1,3,7), (1,4,6), (1,4,7), (1,5,6), (1,5,7)\} \\ \{(2,3,6), (2,3,7), (2,4,6), (2,4,7), (2,5,6), (2,5,7)\}$$



ESPERANZA PROBABILISTICA: Si P es la probabilidad de éxito en un solo ensayo, el número esperado de sucesos o la esperanza de ese suceso en n ensayos estará dada por el producto de n y la probabilidad de éxito.

$$E = n.p$$

Ej: En el lanzamiento Número 900 de dos dados. Cuál es la esperanza de que la suma de sus caras sea un valor menor que 6? Primero obtenemos la probabilidad de éxito del suceso en un solo ensayo.

$$S (<6) = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(4,1)\} \\ \{(2,1)(2,2)(2,3)(3,1)(3,2)\} \quad P(<6) = \frac{10}{36}$$

$$E = n.p = 900 \cdot \left(\frac{10}{36}\right) = \frac{9000}{36} = 250$$

Es la esperanza de que en 250 de los 900 lanzamientos, la suma de sus caras sea menor que 67.

ALGUNAS REGLAS BÁSICAS DE LA PROBABILIDAD

1. REGLA DE LA ADICIÓN

Sucesos mutuamente excluyentes.

Si dos sucesos o más son tales que solamente uno de ellos pueda ocurrir en un solo ensayo se dice que son mutuamente excluyentes. Se denomina probabilidad aditiva y será igual a la suma de las probabilidades de cada suceso.

Ej. La probabilidad de obtener un AS o un REY sacando una sola carta de una baraja española de 40 cartas. Si uno aparece queda excluido el otro.

$$P(\text{AS}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad P(\text{REY}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{AS o REY}) = P(\text{AS}) + P(\text{REY}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Ej. La probabilidad de obtener un 3 o un 6 en el lanzamiento de un dado.

$$P(3) = \frac{1}{6} \quad P(6) = \frac{1}{6} \quad P(3 \text{ o } 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3$$

Ej. Tenemos una caja de 16 bolas de 4 colores diferentes: 3 azules, 6 negras, 2 blancas y 5 verdes. Qué probabilidad tenemos de ganar o perder si las premiadas son blancas o azules?

$$P(\text{ganar Azul}) = \frac{3}{16} \quad P(\text{Blanca}) = \frac{2}{16} \quad P(\text{A o B}) = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(\text{perder Negra}) = \frac{6}{16} \quad P(\text{perder Verde}) = \frac{5}{16} \quad P(\text{N o V}) = \frac{6}{16} + \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\text{Probabilidad Total} = P(A \text{ o } B) + P(N \text{ o } V) = \frac{5}{16} + \frac{11}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

Sucesos Compatibles.

Dos sucesos son compatibles o NO son mutuamente excluyentes, cuando la posibilidad de que ocurra un suceso no impide la ocurrencia del otro, en este caso la probabilidad de uno de los dos sucesos se halla así:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Ej. En el ejemplo anterior, (probabilidad de obtener un AS o un REY sacando una carta de la baraja española). Cuál es la probabilidad de que sea el AS de copas?

$$P(\text{AS}) = \frac{4}{40} \quad P(\text{carta copas}) = \frac{10}{40} \quad P(\text{AS copas}) = \frac{1}{40}$$

$$\begin{aligned} P(A \text{ o } B) &= P(\text{as}) + P(\text{carta copas}) - P(\text{AS copas}) \\ &= \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40} = 0.325 = 32.5\% \end{aligned}$$

2. REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

Sucesos independientes

Si $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ son las distintas probabilidades de presentar n sucesos independientes, la probabilidad (P), de que ocurran todos esos sucesos en un solo ensayo, estará dada por el producto de cada suceso.

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_n$$

Ej. Qué probabilidad se tiene de obtener 2 Reyes sacando una carta de una baraja y la otra de una segunda baraja?

$$P = \frac{4}{40} \times \frac{4}{40} = \frac{16}{1600} = \frac{1}{100} = 0.01$$

Ej. Al lanzar 2 dados, cuál es la probabilidad de sacar dos cincos?

$$P_1 = \frac{1}{6} \quad P_2 = \frac{1}{6} \quad P = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} = 0.027$$

Sucesos dependientes

Los sucesos son independientes o eventos compuestos, si la ocurrencia o no ocurrencia de un evento en cualquier prueba afecta la probabilidad de otros eventos en otras pruebas

Hallar la probabilidad de obtener un AS, un REY y una Sota, de una baraja española, sacando sucesivamente tres cartas sin reposición (sin incluirlas de nuevo, después de haberla sacado de la baraja).

$$P(\text{AS}) = \frac{4}{40} \quad P(\text{REY}) = \frac{4}{39} \quad P(\text{SOTA}) = \frac{4}{38}$$

$$P(\text{AS, REY y SOTA}) = \frac{4}{40} \times \frac{4}{39} \times \frac{4}{38} = \frac{64}{59280} = 0.00107962$$

Ej. Supongamos que se tiene una caja con 10 monedas de \$500 y dos de ellas son falsas. Se sacan 2 monedas de la caja, una después de la otra sin reposición. Cuál es la probabilidad de seleccionar una moneda falsa, seguida por otra también falsa?

$$P(A \text{ y } B) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{90} = 0.04$$

FORMAS DE CONTEO

1. PERMUTACIONES. Maneras de organizar una determinada cantidad de elementos.

Ej. Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, si no se permiten repeticiones?

$$\text{Cando intervienen todos los elementos tenemos: } \boxed{nP_n = n!} \Rightarrow {}_4P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ej. Cuántos números de 4 cifras se podrán formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si se permiten repeticiones?

$$\text{Cuando las repeticiones son permitidas } \boxed{nPr = n^r} \Rightarrow {}_5P_4 = 5^4 = 625$$

Ej. De cuántas formas se pueden organizar 7 libros formados en grupos de 4?

Quando intervienen r de los n elementos dados

$$\boxed{nPr = \frac{n!}{(n-r)!}} \Rightarrow {}_7P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 840$$

Ej. Cuántos grupos de diez letras se pueden formar con las letras de la palabra MATEMÁTICA?

De las diez letras de la palabra se repiten: la m (2 veces), la a (3 veces) y la t (2 veces), entonces:

Cuando algunos de los objetos son iguales, el número de permutaciones está dado por: $P = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$

$$P = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 151.200$$

2. **COMBINACIONES:** Forma de organizar los elementos de un conjunto sin tener en cuenta su orden

$${}^n C_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ej. Cuántos comités de tres miembros se pueden seleccionar de un grupo de 8 personas?

$${}^8 C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

EJERCICIOS

1. Tres cartas se escogen sucesivamente de un naipe de 52 cartas. Encuentre el número de formas en que puede hacerse: a) con reposición. B) sin reposición
2. Cuántos comités de 3 se pueden formar con 8 personas?
3. Suponga que una clave está formada por 4 caracteres, siendo los dos primeros letras del alfabeto y los dos últimos, dígitos. Encuentre el número de: a) claves, b) claves que empiezan por vocal
4. Encuentre el número de permutaciones distintas que pueden formarse con las palabras:
a) PROBABILIDAD b) INSTITUTO c) TECNOLÓGICO
5. Suponga que se selecciona al azar un estudiante de un grupo de 80, donde 30 están tomando Matemáticas, 20 Química y 10 Matemáticas y Química. Encuentre la probabilidad de que el estudiante esté tomando matemática o Química.
6. Una tómbola contiene 15 balotas, que están numeradas del 1 al 15. Se saca una al azar y el número es registrado. Encuentre la probabilidad de que el número sea: a) par, b) menor de 5, c) par y menor de 5, d) par o menor de 5.
- 7.